*שיעור שלישי*

**חזרה מהרצאות 1-2**

**משפט 1:**

נתון טור (1):

אם טור (1) מתכנס אזי האיבר הכללי שואף ל-0.

הוכחה:

טור (1) מתכנס אזי:

,

כאשר:

*אם טור מתכנס ז"א לכל מתקיים:*

*נתון:*

*אז:*

*מסקנות:*

1. *אם האיבר הכללי שואף לאפס, זה לא אומר בהכרח שהטור מתכנס.*
2. *אם איבר כללי שונה מאפס, הטור מתבדר.*

**הרצאה 3**

**מבחן השוואה ראשון :**

*נתונים 2 טורים ו-*

*ומתקיים יחס בין ל- כך ש:*

*אזי:*

1. *אם טור מתכנס אז גם טור מתכנס,*
2. *אם טור מתבדר אז גם טור מתבדר.*

*הוכחה:*

*נשתמש בתכונה של אם טור מתכנס אזי אפשר להוכיח מספר סופי של איברים ולא משפיע על התכנסות, נניח שקיימים הסכומים החלקים בהתאמה ל- ו-:*

*לפי התנאי נובע:*

*נניח טור מתכנס וסכום שלו ,*

1. *אם קיים גבול סופי של אזי סדרה חסומה על ידי לכן לפי משפט קיים גבול והטור מתכנס.*
2. *אם טור מתבדר אזי , זה התבדרות של טור .*

*הערה של משפט 1:*

*המשפט הוא בעל תוקף גם אם לכל קבוע מתקיים .*

**משפט השוואה שני :**

*אם קיים גבול : :*

1. *אם , הטורים ו- מתכנסים או מתבדרים יחד.*
2. *אם , מהתכנסות של טור נובעת התכנסות של טור .*
3. *אם , מהתכנסות של טור נובעת התכנוסת של טור .*

*הוכחה:*

*נבחר , כזה שיקיים , נובע ש- כך שאם מתקיים אז מתקיים:*

*או*

*לפי משפט השוואה 1 ואי-שיוויון 2 אפשר לכתוב השוואה:*

*נובע הוכחה א'.*

**הוכחת מבחן דלמבר:**

1. *כאשר :*

*אפשר להביע טור גאומטרי מתכנס: אז לפי משפט השוואה הטור מתכנס.*

1. *כאשר יש את האישיווין:*

*לכן יש סדרה חיובית מונוטונית עולה לכן*

*זאת אומרת לא מתקיים תנאי הכרחי של התכנסות לכן טור מתבדר.*

**הוכחת מבחן קושי (מבחן שורש):**

*הוכחה:*

*ממקים מסוים איברי הטור כש-, נתבונן על איבר כללי ,*

*נתבונן בטור:*

*כך ש:*

*זאת אומרת איברי טור יותר קטנים מאיברי (אם ) כמו דלמבר אנגלוגי – גם לשורש מתקיים.*

**הוכחת משפט לייבניץ:**

*נתון הטור:*

*לפי מבחן לייבניץ אם מתקיימים שני התנאים הבאים אזי הטור מתכנס:*

1. *איבר כללי שואף ל-0.*

*הוכחה:*

*נתבונן בסכומים חלקיים:*

*מכאן נובע שיש סדרה:*

*שסדרה זו היא מונוטונית עולה וחסומה, כלומר מתקיים ובגלל ש- (איבר כללי) אז קיים גבול של .*

*לאי-שיוויון*

*אז:*

*כלומר טור מתכנס, הערה:*

*ולכן יתקיים:*

*נעבור לגבול כאשר :*

*ונגדיר: ( – זה שארית)*